CONCOURS TA

ENS Cachan - ENSAIS B - ENSAIT - ESEM - ITECH - ENSAM
CONCOURS COMMUN POLYTECHNIQUE

MATHÉMATIQUES 1

Durée : 4 h 00

Les parties I, II et III sont indépendantes.

Dans tout le problème l' espace est rapporté à un repère orthonormé direct $R=(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ noté aussi Oxyz et a désigne un réel strictement positif.

I On considère la forme différentielle ω définie sur l'ouvert $\mathcal{U} = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 / (x,y)\neq(0,0)\}$ par :
$\omega(x,y,z)=P(x,y,z)\,dx+Q(x,y,z)\,dy+R(x,y,z)\,dz$ avec :

$\forall (x,y,z)\in\mathcal{U}$

$$P(x,y,z)=\frac{xz}{\sqrt{x^2+y^2}\left(x^2+y^2+z^2\right)},\ Q(x,y,z)=\frac{yz}{\sqrt{x^2+y^2}\left(x^2+y^2+z^2\right)}\ \text{et}\ R(x,y,z)=-\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{x^2+y^2+z^2}.$$

1. On donne la courbe Δ : $\begin{cases} x^2+y^2+z^2=a^2 \\ y+z=0 \end{cases}$ orientée de façon que sa projection δ sur le plan xOy soit parcourue dans le sens direct, xOy étant orienté par le repère $(O,\vec{i},\vec{j})$.

a) Quelle est la nature de Δ ? Donner une équation de δ dans le repère $(O,\vec{i},\vec{j})$.
Quelle est la nature de δ ?

b) $\vec{\Delta}$ désigne Δ orientée comme ci-dessus
Donner un paramétrage de $\vec{\Delta}$. Calculer $\int_{\vec{\Delta}}\omega$ à l'aide de ce paramétrage.

2. a) Calculer $\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial x}$; $\frac{\partial Q}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial y}$; $\frac{\partial R}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial z}$.

b) $\mathcal{U}$ est-il étoilé ? Montrer qu'il existe f de classe C^1 sur $\mathcal{U}$ telle que $\omega = df$ et $f(1,0,0)=\frac{\pi}{2}$.
Exprimer f (x, y, z).
Que peut-on en déduire pour ω ?
Retrouver la valeur de $\int_{\vec{\Delta}}\omega$.

c) Donner une interprétation géométrique de f (x, y, z).

II Pour tout $\lambda\in[-a,a]$ on considère la courbe C_λ du plan xOy orienté par $(O,\vec{i},\vec{j})$, d'équation polaire $\rho=\lambda\sin\theta-\sqrt{a^2-\lambda^2}$ relativement à l'axe polaire Ox.

1. Montrer que les courbes C_λ ont un axe de symétrie commun.

2. Que peut-on dire de C_λ et $C_{-\lambda}$?

b) Placer, avec soin, les projections s, s ', s " du point S.
Placer les projections sur yOz des génératrices du cône $\mathcal{C}$ situées dans le plan frontal $x = \frac{5}{4}a$.
Placer la projection sur xOy de la section du cône $\mathcal{C}$ par le plan horizontal z = a.

2. Soient B et C les points de Γ situés dans le plan horizontal z = a et tels que $x_B > x_C$.

a) Placer les projections b, b ', b " du point B et c, c ', c " du point C.

b) Montrer que le plan tangent en B à la sphère Σ est parallèle à Oz.
Montrer que le plan tangent en B au cône $\mathcal{C}$ est parallèle à Oy.
Les droites d'intersection de ces plans tangents avec le plan frontal $x = \frac{5}{4}a$ sont sécantes en un point T.
Montrer que BT est la tangente en B à Γ.

c) Placer les projections t, t ', t " du point T.
Placer les tangentes en b, b ', b " et c, c ', c " à γ, γ', γ''.

3. Soient M, N les points de Γ situés dans le plan horizontal $z = \frac{a}{2}$ et tels que $x_M > x_N$.
Placer les projections m, m ', m " du point M et n, n ', n " du point N.

4. En admettant que la tangente à Γ en S est une génératrice du cône $\mathcal{C}$, préciser cette tangente.
Placer les tangentes en s, s ', s " à γ, γ', γ''.

5. Soient D, E les points de Γ d'ordonnée minimum et tels que $x_D > x_E$.

a) En utilisant *III 2. b)*, préciser l'axe de symétrie de la parabole P '. Placer cet axe de symétrie ℓ'.

b) Placer les projections d, d ', d " du point D et e, e ', e " du point E.

c) Placer les tangentes en d, d ' et e, e ' à γ, γ'.

d) Placer le foyer f ' de la parabole P '.

6. Soit G le point de Γ de cote minimum.

a) Placer les projections g, g ', g " du point G.

b) Montrer que les plans tangents en G à la sphère Σ et au cône $\mathcal{C}$ sont parallèles à Ox.
En déduire la tangente en G à Γ.
Placer les tangentes en g, g ', g " à γ, γ', γ''.

7. Tracer γ, γ' et γ''.

V On note γ_λ la projection de Γ_λ, $\lambda \in [-a,a]$, sur xOy. Γ_λ a été définie au *III*. Montrer que γ_λ, privée, pour certaines valeurs de λ à préciser, d'un point à préciser aussi, se déduit de la courbe C_λ par une transformation géométrique simple. C_λ a été définie au *II*. On utilisera le repère R_λ défini au *III*.